Vorlesungsmitschrift zur Vorlesung Theoretische Informatik vom 02.02.2001

Von Matr.-Nr.: 702100

7. Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit

Def. F: Sei $X_0 = \{0,1\}$
$H := \{ bw_\tau 00u \mid \tau$ ist eine Turingmaschine, Eingabealphabet X_0, bw_τ : binäre Standartcodierung von τ, $u \in X_0^*$ und Res_τ existiert $\}$
heißt Halteproblem

Einschub: binäre Standartcodierung

Idee: Bilde $\tau = \{...\}$ in $\{0,1\}^* = X_0^*$ ab
$\tau = (S, X, \Gamma, \delta, s_0, b)$ vorgegeben
Definiere
- Zahl n der Zustände, o.B.d.A. $S = \{0,...n-1\}$
- $\Gamma = \{ \gamma_1,...,\gamma_k \}$
- $X = \{ \gamma_{i\,1},...,\gamma_{i\,r} \} \subseteq \Gamma$
- δ besteht aus n-k Zeilen zu je 5 Werten (S, X, S‘, X‘, Bewegung)
- O.b.d.A.: $s_0 = 0$, $b = \gamma_k$

Sei $\Gamma' = \Gamma \cup \{$ “,“ , “;“ $\} \cup \{0,...,n\}$.
Dann $\delta \subseteq \Gamma'$.
Nun kann man jedem z eineindeutig ein binäres Wort zuordnen:
$n = W_\tau \in \Gamma'^*$; $\gamma_{i\,1},...,\gamma_{i}$; σ ; γ_1; $\delta(0, \gamma_1)$;0, γ_2, $\delta(0, \gamma_2)$; ... ;0...;
...; n-1, γ_k , $\delta(n-1, \gamma_k)$
Standartcodierung von τ
Abbildung von w_τ nach $\{0,1\}^* = X_0^*$ liefert binäre Standartcodierung

ACHTUNG: *Im folgenden Lemma verwende ich für das τ-Dach ein τ’*

Lemma G: H ist aufzählbar, aber nicht entscheidbar

Beweis: Nichtentscheidbarkeit ist bereits bekannt.
Zur Aufzählbarkeit zeige: H ist Haltebereich einer Turingmaschine.
Konstruiere eine Turingmaschine τ’ mit Haltebereich H.
τ arbeitet folgendermaßen: Zu $v \in X_0^*$ prüfe, ob v die Form $v = bw_\tau 00u$ hat.
Falls nein, dann gehe in unendliche Schleife.
Andernfalls ändere Bandinschrift $bw_\tau 00u$ in bw_τ#cu.
Nun simuliert τ’ schrittweise τ, indem die δ-Tabelle von τ schrittweise in das Band von τ (c...$) ungesetzt wird.

Falls τ nicht akzeptiert, dann auch nicht τ'.
Andernfalls trift man irgentwann auf “halt” bezüglich τ.
Dann löscht τ' alles bis auf ein Symbol $t \in X_0 \Rightarrow$ H ist Haltebereich von τ'

Satz H: Es gibt eine Turingmaschine τ, die als Eingabe eine beliebige Turingmaschine τ' und ein Wort w akzeptiert und die Arbeitsweise von τ' auf w simuliert:

$$h_\tau(\tau', w) = h_{\tau'}(w)$$

τ heißt universelle Turingmaschine (effektiv konstruierbar)

Bemerkung: $X_0^* \setminus H$ ist nicht aufzählbar (sonst wäre H entscheidbar)

Satz I und J wurden nicht in der Vorlesung behandelt

7.1. Busy – Bewer - Funktion

Def. K: a.) Eine Turingmaschine β heißt Busy – Bewer – Turingmaschine mit u Zuständen, wenn

β = (S, {|}, {|,b}, δ, 1, b) mit

s = {1,...,n} (BBT(n))

b.) Die Abbildung BB: N $\rightarrow$ N mit

BB(n) = max{anz(β)| β ist BBT(n) und β hält an}

anz(β) = # der Striche die β insgesammt auf das leere Band schreibt, heißt Busy – Bewer – Funktion

Beispiel: n = 2

S	x	δ(s,x)
1	b	2 | R
1	|	2 | L
2	b	1 | L
2	|	2 | h

Es gilt:

n	1	2	3	4	5	6
BB(n)	1	4	6	12	≥4098	$\geq 6{,}4*10^{462}$

Wieviele BBT(n) gibt es?
Beobachtung: 1. Zeile: 1b | 2 | R
Haltebereich: sa | s | h
Übrige Zeilen: sa | s'a'B, B $\in$ {L,R}, a,a' $\in$ {| , b}, s,s' $\in$ {1,...,n}
Folglich gilt: Anzahl der BBT8n): $(n*2*2)^{2n-2} * (2n-1) = 4n^{2n-2}*(2n-1)$

n	2	3	4	5
	192	124000	117 Mio	1230 Mrd

Satz L: BB ist nicht partiell rekursiv, also nicht berechenbar
[anschaulich: BB wächst schneller als jede berechenbare Funktion]

Beweis: Wir zeigen, daß unter der Annahme, BB wäre berechenbar, zu jeder berechenbaren Funktion f ein $n_0 \in$ N gibt mit BB8n) > f(n), $\forall$ n $\geq n_0$

Angenommen BB ist berechenbar.
Dann gibt es eine Turingmaschine τ, die aufgesetzt auf $|^n$ die Inschrift $|^{BB(n)}$ liefert. Sei f eine beliebige berechenbare Funktion und definiere

$$F(x) = \sum_{i=0}^{x} (f(i) + i^2)$$

f ist berechenbar → F ist auch berechenbar
Sei τ_F eine Turingmaschine, die F berechnet, d.h. sie produziert angesetzt auf $|^x$ die Inschrift $|^x b |^{F(x)}$
τ_F habe n Zustände.
Nun betrachte Turinmaschine τ' die mit x Zuständen erst $|^x$ auf fas leere Band schreibt und anschließend τ_F zweimal nacheinander startet.
Ergenbis: $|^x b |^{F(x)} b|^{F(F(x))}$
τ' hat $x + 2n$ Zustände.
τ' ist eine BBT(x + 2n) mit x + F(x) + F(F(x)) Strichen
→ $BB(x + 2n) \geq x + F(x) + F(F(x))$
Nach Definition gilt: $F(x) \geq x^2$ und es existiert eine Konstante c_1, so daß
$x^2 > x + 2n$ für alle $x \geq c_1$.
Es folgt $F(x) > x + 2n$ ab $x \geq c_1$.
Ferner $F(x) > F(y)$, falls $x > y$.
Also $F(F(x)) > F(x + 2n)$ ab $x \geq c_1$.
Also $BB(x + 2n) \geq x + F(x) + F(F(x)) > F(F(x)) > F(x + 2n) \geq f(x + 2n)$
Also ist die BB-Funktion ab einem Index $x \geq c_1$ größer als f
→ BB ist nicht berechenbar.