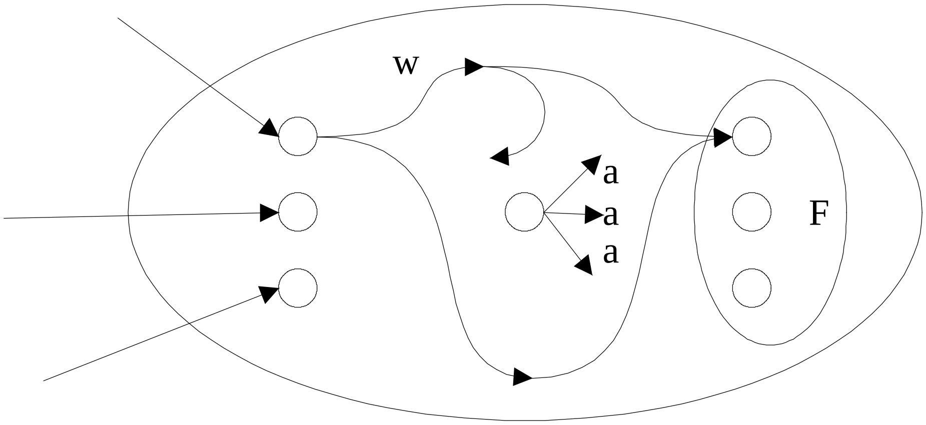
Mitschrift zur Vorlesung Theoretische Informatik

von 19.05.00

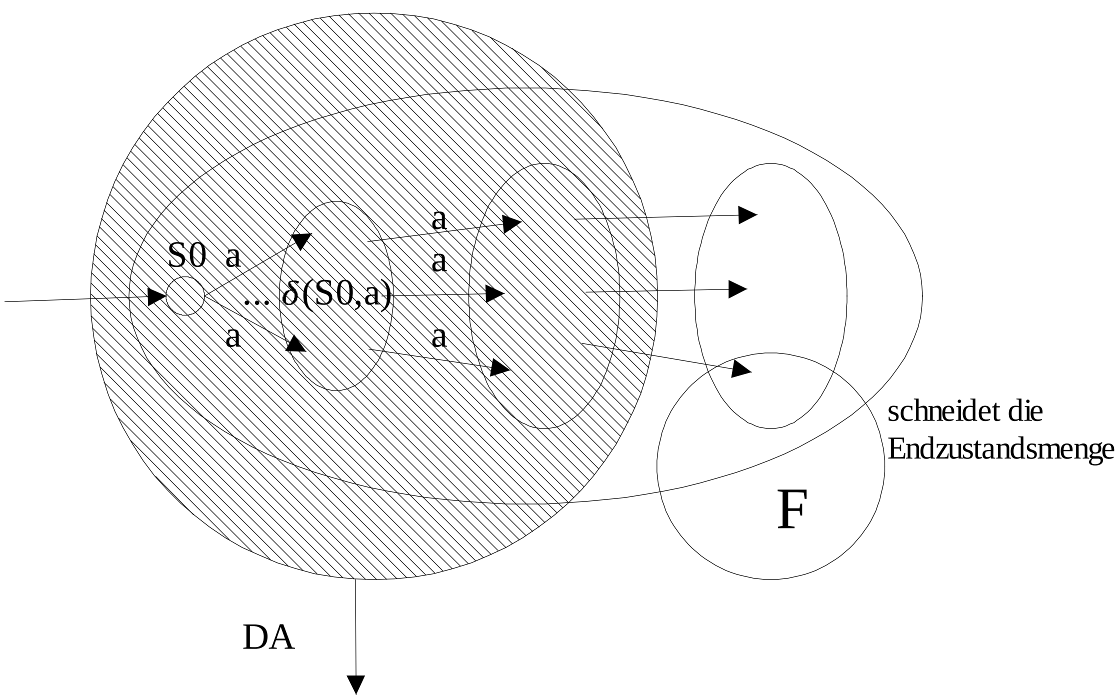
<u>Nichtdeterministischer endlicher Akzeptor NA</u>

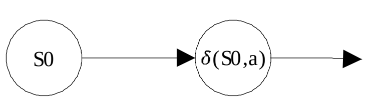


Es existiert einen Weg von der Menge der Startzustände in die Menge der End-zustände auf dem w erkannt wird.

<u>Beweis:</u> NVA = DA, NVA $\supseteq$ DA bereits gezeigt.

Zu zeigen: DA $\supseteq$ NVA





$2^S \supseteq \delta(S,a)$, $\delta(S,a) \in 2^S$

Endlich viele Teilmengen

Sei B (X,S,δ,S_0,F) ein nichtdeterministischer vollständiger Akzeptor.

Man konstruiere den zu B gehörigen deterministischen endlichen Akzeptor $A = (X,Z,\delta',Z_0,F_A)$ mit folgender Maßgabe:

$Z = 2^S \setminus \{\varnothing\}$ wegen N<u>V</u>A,

$Z_0 = S_0$, $|Z_0| = 1$, da die S_0 zusammengeführt werden

$F_A = \{S' \cap S \mid S' \cap F \neq \varnothing\}$ = die Mengen, die die Endzustandsmenge schneiden

$\delta'(S',x) = \underset{s \in S'}{U} \delta(S,x)$ für alle $x \in X$, $S' \subseteq S$

<u>Zwischenbehauptung 1:</u> Für alle $w \in X^*$ und $S' \subseteq S$ gilt: $\delta'(S',x) = \underset{t \in S'}{U} \delta(t,w)$.

Beweis zur Zwischenbehauptung 1 mittels Vollständiger Induktion über die Länge von w:

IA $|w| = 0 \Leftrightarrow w = \varepsilon$

$|w| = 1$ gegeben nach Definition von δ'

IV Zwischenbehauptung 1 sei für alle Wörter bis zur Länge k bewiesen.

IB Zwischenbehauptung 1 gilt auch für Wörter w deren Länge größer als k ist.

IS Betrachte man ein $w \in X^*$ mit $|w| = k$, $x \in X^*$ und $S' \subseteq S$. Dann gilt:

$\delta'(S',xw) = \delta'(\delta'(S',x),w)$ nach Definition G.

Das ist nach IB gleich $\underset{t \in \delta'(S',w)}{U} \delta(t,w) = \underset{s \in S'}{U} \underset{t \in \delta(S,x)}{U} \delta(t,w)$ nach Definition von $\delta'(S',x)$ $= \underset{s \in S'}{U} \delta'(S,xw)$ nach Definition G.

Zwischenbehauptung 1 ist damit bewiesen.

<u>Behauptung: L(A) = L(B)</u>

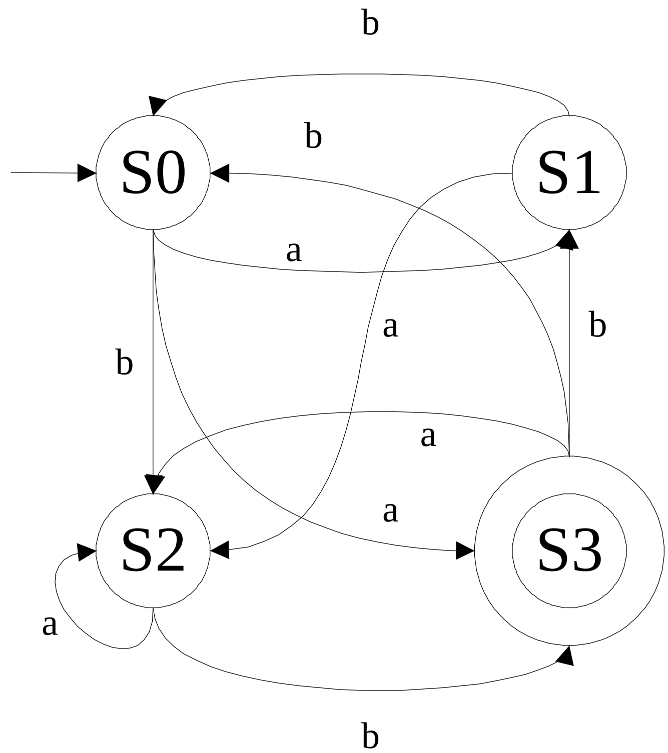
Zu zeigen: $L(A) \subseteq L(B)$ und $L(A) \supseteq L(B)$

erster Teil: zeige das $L(A) \supseteq L(B)$ gilt

Für alle $w \in X^*$ gilt: $w \in L(B) \Rightarrow \exists s_0 \in S_0$ mit $\delta(s_0,w) \cap F \neq \varnothing \Rightarrow \left(\underset{s \in S_0}{U} \delta(S,w)\right) \cap F \neq \varnothing \overset{\text{Zwischenbehauptung 1}}{\Rightarrow} \delta'(s_0,w) \cap F \neq \varnothing \overset{\text{nach Def. von } Z_0 \text{ und } F_A}{\Rightarrow} \delta'(s_0,w) \in F_A \Rightarrow w \in L(A)$.

Für jeden der Folgepfeile kann man sich überlegen, dass die andere Richtung ebenfalls zutrifft. Es folgt, dass $L(A) = L(B) \Rightarrow DA \supseteq NVA$. ❑

Beispiel



X = {a,b}

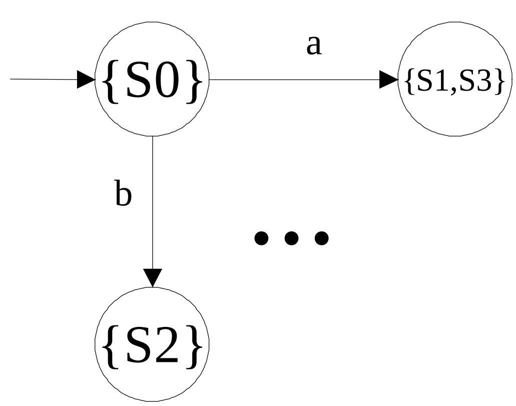
Z = {{S0},{S1},{S2},{S3},{S0,S1}
... {S0,S1,S2,S3}}

	a	b
0	13	2
1	2	0
2	2	3
3	. . .	. . .
10	123	20
20	123	23
30	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .
1230	. . .	. . .

Diese Darstellung ist unhandlich, da viele Automaten gar nicht ihre $2^{|S|}$ Zustände in Anspruch nehmen. Ein besseres Verfahren ist der inkrementelle Aufbau der Zustandsübergangstabelle

	a	b
{S0}	{S1,S3}	{S2}
{S1,S3}	{S2}	{S0,S1}
{S2}	{S2}	{S3}
{S0,S1}	{S1,S2,S2}	{S0,S2}
. . .	. . .	. . .

Statt $Z = 2^S$ gehe über zu $Z' = \{S' \in S \mid \exists\, w \in X^* \text{ mit } \delta'(s_0,w) = S'\}$. Z enthält dann nur die von S_0 erreichbaren Zustände. I. a. sind das weniger als 2^S.



Ein Problem ist die Größe des deterministischen endlichen Automaten mit seinen $O(2^{|S|})$ Zuständen. Eine intressante Frage dabei ist, ob man eventuell mit weniger Zuständen auskommt.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es Beispiele von nichtdeterministischen endlichen Akzeptoren, die mit n Zuständen eine Sprache L erkennen, so dass der äquivalente deterministische Akzeptor 2^n Zustände hat und kein Akzeptor mit 2^{n-1} (eine Größenordnung weniger) Zuständen existiert.

Im Folgenende wird der Satz I benutzt um weitere Abschlußeigenschaften wie die Konkatenation, die *- und die $^+$-Bildung nachzuweisen.

Definition J: Seien $L_1, L_2 \in X^*$ Sprachen.

Unter der Konkatenation $L_1 \cdot L_2$ verstehen wir die Sprache:

$$L_1 \cdot L_2 := \{uv \mid u \in L_1, v \in L_2\}$$

Unter der *-Bildungvon L_1 verstehen wir die Sprache:

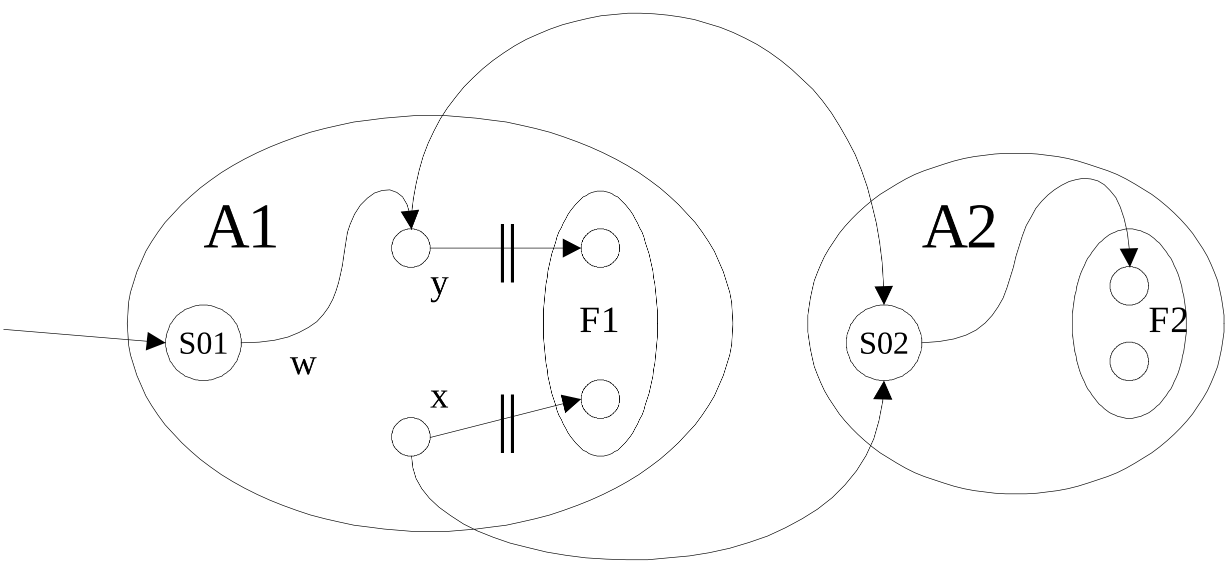
$$L_1^* := \{w_1 w_2 \ldots w_r \mid w_i\ L_1,\ i = 1 \ldots r,\ r \in \mathbb{N}_0\}$$

Unter der +-Bildungvon L_1 verstehen wir die Sprache:

$$L_1^+ := L_1^* \setminus \{\varepsilon\}$$

Satz K: DA ist abgeschlossen gegenüber der Konkatenation, der *-Bildung und der $^+$-Bildung. D.h. mit $R_1, R_2 \in DA$ gilt: $R_1 \cdot R_2 \in DA$, $R_1^* \in DA$ und $R_1^+ \in DA$.

Die Idee bei der Konkatenation ist die folgende:



$L(A_1) = R_1$ $L(A_2) = R_2$

Beweis der Konkatenation:

Seien R_1, $R_2 \in DA$ und $A_1 = (X_1,S_1,\delta_1,S_{01},F_1)$, $A_2 = (X_2,S_2,\delta_2,S_{02},F_2)$ mit $L(A_1) = R_1$ und $L(A_2) = R_2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Dann bildet

$B = (X_1 \cup X_2, S_1 \cup S_2 \cup \{q\}, \delta, \{S_{01}\}, F_2)$ mit

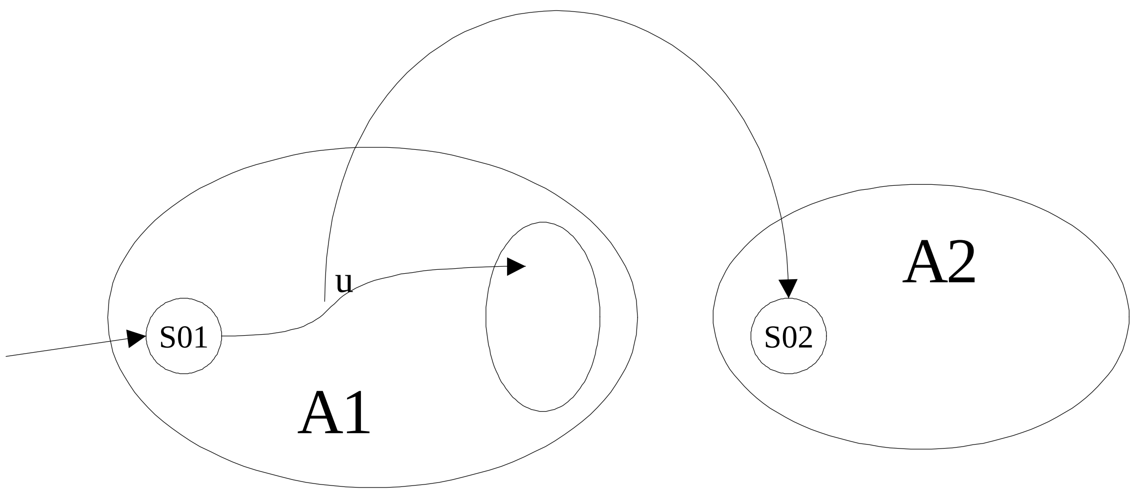
$$\delta(S,x) = \begin{cases} \{\delta(S,x)\} & falls\ S \in S_1, x \in X_1\ und\ \delta_1(S,x) \neq F_1 \\ \{\delta(S,x)\} \cup \{S_{0_2}\} & falls\ S \in S_1, x \in X_1\ und\ \delta_1(S,x) = F_1 \\ \delta_2(S,x) & falls\ S \in S_2\ und\ x \in X_2 \\ \{q\} & sonst \end{cases}$$

die Konkatenation der Automaten A_1 und A_2.

Behauptung: $L(B) = (L(A_1)\backslash\{\varepsilon\} \cdot L(A_2))$

Beweis: „$\supseteq$„

Für $k \in L(A_1)$, $u \neq \varepsilon$ gilt: $\delta_1(S_{01},u) \in F_1$ nach Voraussetzung, also ist auch $S_{02} \in \delta(S_{01},u)$ nach obiger Definition.



Für $v \in L(A_1)$ gilt: $\delta_2(S_{02},v) \in F_2$, woraus nach Definition von δ folgt, dass $\delta(S_{01},uv) \cap F_2 \neq \emptyset$, also ist $uv \in L(B)$.

„$\subseteq$„

Es sei $w \in L(B)$, d.h. - nach Definition von NA - $\delta(S_{01},w) \cap F_2 \neq \emptyset$

Nach Definition von δ muß in der Folge der Zustände, die von S_{01} nach F_2 führen, S_{02} auftreten, da man nur über S_{02} von A_1 nach A_2 wechseln kann. Das heißt w ist zerlegbar in $w = uv$ mit $u \neq \varepsilon$ und $\delta_1(S_{01},u) \in F_1$ und $\delta_2(S_{02},v) \in F_2$. Es folgt das $w \in (L(A_1)\backslash\{\varepsilon\} \cdot L(A_2))$.

Zwischenergebnis:

falls $\varepsilon \notin L(A_1)$, dann ist $L(B) = L(A_1) \cdot L(A_2)$. Ist $\varepsilon \in L(A_1)$. Es gilt:

$L(B)$ ($\in DA$ wegen der Abschlußeigenschaft gegenüber $\cup$) $\cup$ $L(A_2)$ ($\in DA$) =

$$(L(A_1)\backslash\{\varepsilon\} \cdot L(A_2)) \cup L(A_2) = L(A_1) \cdot L(A_2)\ (\in DA) = \{\varepsilon\} \cdot L(A_2)$$

$$(L(A_1)\backslash\{\varepsilon\} \cdot L(A_2)) \cup \{\varepsilon\} \cdot L(A_2) \overset{\text{Ausklammern}}{=} (L(A_1)\backslash\{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\}) \cdot L(A_2)$$

Es folgt, dass DA abgeschlossen gegenüber der Konkatenation ist.

Idee für die *-Bildung: