Theoretische Informatik I

Script zur Vorlesung vom 09.06.20000

Angefertigt von: Matrikel-Nr.: 702781

Worauf wurde in dieser Vorlesung eingegangen?

1. Eingehen auf die vorherigen Vorlesung

Die vorherigen Vorlesung befasste sich mit regulären Ausdrücken und ihrer Bedeutung . Es wurden in weiteren die Klasse aller regulären Sprachen definiert. In Satz Q wurde gezeigt, dass die Klasse der regulären Sprache gleich der Klasse aller Sprachen ist, die von endlichen deterministischen Akzeptoren akzeptiert wird.
Im folgenden werden zu diesen Thema noch ein paar Bemerkungen gemacht.

Bemerkung: Offenbar muss gelten für jedes $i \in S$: $X^* = \bigcup_{j \in S} W_{ij}^{\ n}$

Es wird in i gestartet und landet für beliebige $w \in X^*$ in irgendein $i \in S$.

Dies sind Folgerungen des Beispiels aus der letzten Vorlesung:

$$W_{11}^{\ 2} \cup W_{12}^{\ 2} = \{a,b\}^* = \{\varepsilon\} \cup \{a,b\} \cdot \{b,aa,ab\}^* \cdot \{a\} \cup \{a,b\} \cdot \{b,aa,ab\}^*$$

mit $W_{11}^{\ 2} = \{\varepsilon\} \cup \{a,b\} \cdot \{b,aa,ab\}^* \cdot \{a\}$ und $W_{12}^{\ 2} = \{a,b\} \cdot \{b,aa,ab\}^*$

Nun stellt man sich folgende Frage:

Kann man maschinell entscheiden, ob für einen regulären Ausdruck R gibt: $\sigma(R) = X^*$?
(Es handelt sich hierbei um das Maximalitätsproblem und analog das Leerheitsproblem.)

Das Problem ist algorithmisch lösbar (siehe Übungsaufgaben)

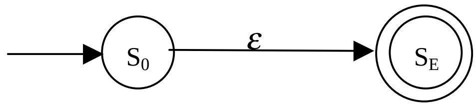
2. Systematische Konstruktion von Akzeptoren:

2.1. induktive Vorgehensweise:

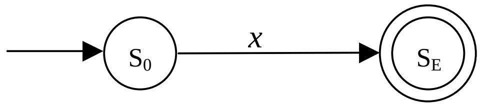
Regulären Ausdruck | Automat

$\emptyset$

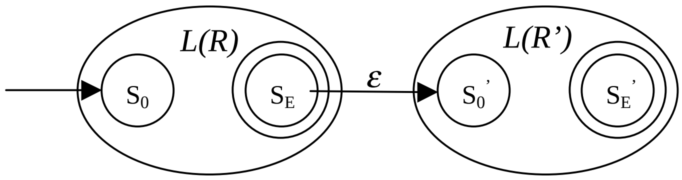
ε



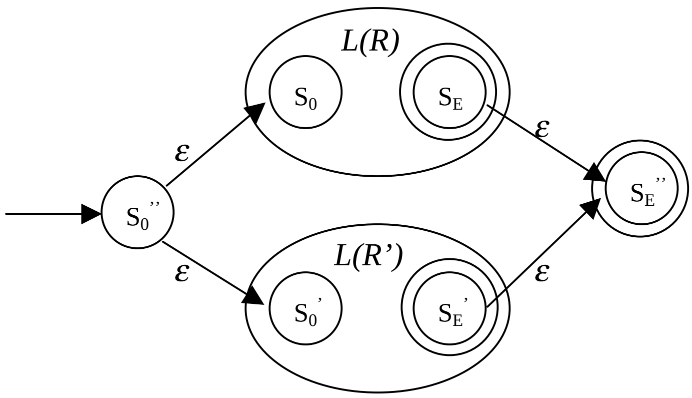
$x \in X$



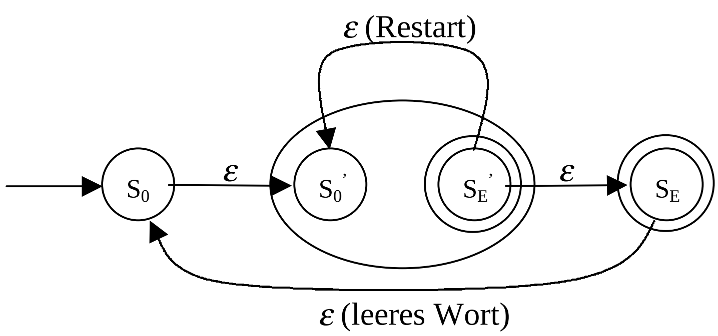
$R \cdot R'$



$R \cup R'$

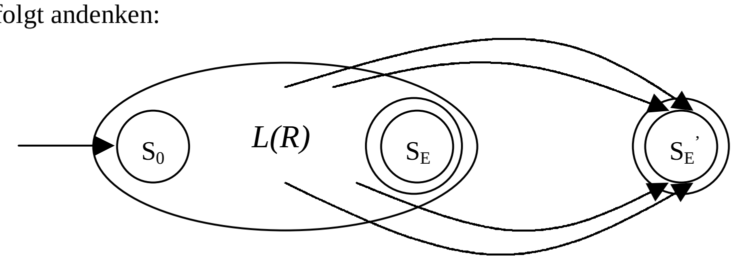


R^*



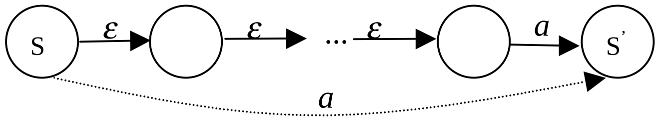
Die Differenz kommt nicht in den regulären Sprachen vor, da man sie auch zur Beschreibung dessen nicht benötigt. Man könnte diese aber wie folgt andenken:

X^* / R

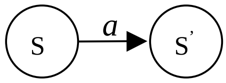


2.2. ε - Übergänge entfernen:

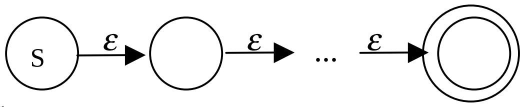
a) Falls es den Übergang



gibt, dann ergänze:



b) Falls es den Übergang



dann mache s zu Endzustand.

c) Lösche alle ε - Übergänge

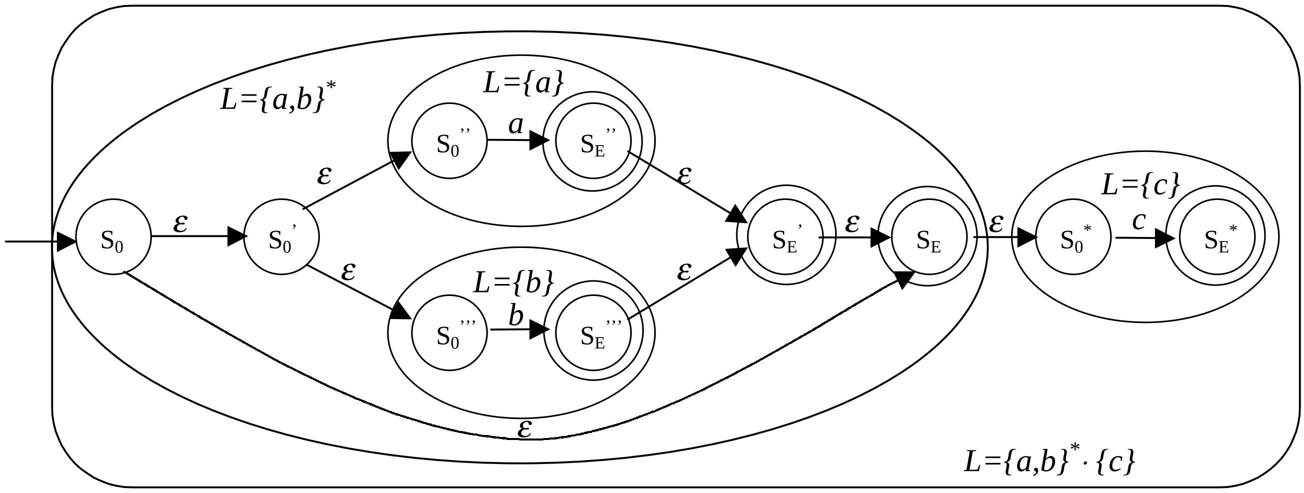
2.3. Akzeptor deterministisch machen:

siehe Mitschrift vom 19.05.00
Nach Satz I gilt DA=NVA=NA, also gewinnt man nicht an Mächtigkeit durch einen nichtdeterministisch (vollständigen) endlichen Akzeptor und kann somit diese in einen deterministisch endlichen Akzeptor überführen.

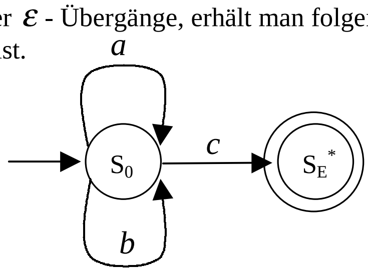
2.4. Reduziere den Akzeptor:

Man reduziert den Akzeptor auf den Eindeutigen (bis auf Isomorphie), welcher dann ein zustandsminimaler Akzeptor ist.

Beispiel: $(a \cup b)^* \cdot c$ ist ein regulärer Ausdruck
Diesen Automatengraphen erhält man nach Anwendung der induktiven Vorgehensweise.



Nach entfernen der ε - Übergänge, erhält man folgenden deterministischen endlichen Automaten, welcher zustandsminimal ist.



3. Algebraische Charakterisierung regulärer Sprachen

Wir kennen folgende Charakterisierung:
- endlich deterministische Akzeptoren (DA)
- endlich nichtdeterministische Akzeptoren (NDA)
- reguläre Ausdrücke
- algebraische Charakterisierung
- (später: grammatikalische Charakterisierung)

Die endlichen deterministischen und nichtdeterministischen Akzeptoren sind Automatenbezogen und können zum „Erkennen“ von Sprachen genutzt werden. Mit der später kennen zulernenden grammatikalischen Charakterisierung kann man mit Hilfe dieser auch Sprachen „Erzeugen“.
Die regulären Ausdrücke und die algebraische Charakterisierung sind Sprachbezogen und dienen zum „Erzeugen“ von Sprachen.

3.1.Definition R: Sei $L \subseteq X^*$ eine Sprache.

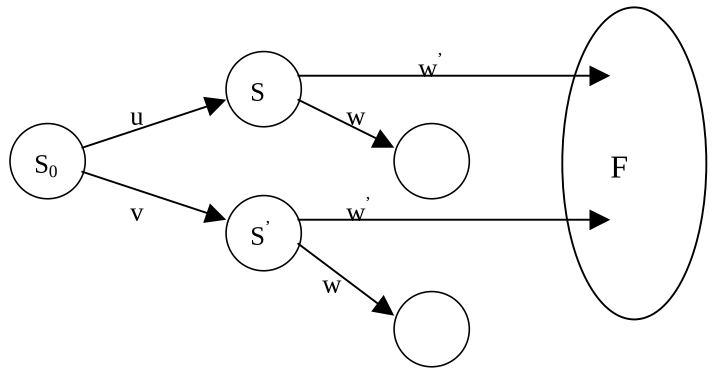
Die Relation $\equiv_L$ ist definiert durch

$$\forall u, v \in X^* : (u \equiv_L v \Leftrightarrow \forall w \in X^* : (uw \in L \Leftrightarrow vw \in L))$$

heißt Nerode – Äquivalenz zur Sprache L.

Dies bedeutet, dass $u, v \in X^*$ können bei beliebiger Konkatenation mit $w \in X^*$ zu gleich zu Worten aus $\in L$ bzw. $\notin L$ fortgesetzt werden.

Anschaulich kann man sich diesen Sachverhalt folgendermaßen vorstellen:



3.2. Bemerkung 1: $\equiv_L$ ist eine Äquivalenzrelation ,denn:

$\equiv_L$ ist reflexiv: $\forall u \in X^* : u \equiv_L u$

$\equiv_L$ ist symmetrisch: $\forall u, v \in X^* : u \equiv_L v \Leftrightarrow v \equiv_L u$

$\equiv_L$ ist transitiv: $\forall u, v, w \in X^* : u \equiv_L v \wedge v \equiv_L w \Rightarrow u \equiv_L w$

3.3. Bemerkung 2: $\equiv_L$ ist verträglich mit der Rechtskonkatenation:

$$\forall u, v, w \in X^* : u \equiv_L v_L \Rightarrow uw \equiv_L vw$$

(die Relation $\equiv_L$ ist verträglich mit der Wortverlängerung von rechts)

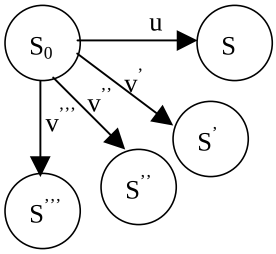
3.4. Definition S: Sei für jedes $u \in X^* : [u] := \{v \in X^* \mid u \equiv_L v\}$ die Äquivalenzklasse von v bezüglich $\equiv_L$.

$K_L := \{[u] \mid u \in X^*\}$ ist definiert als die Menge aller Äquivalenzklassen.

$\mid K_L \mid$ ist der Index von $\equiv_L$.

Anschauliches Beispiel: $v, v', v'' \in [u] \Rightarrow$

das funktionelle Verhalten von s, s', s'', s''' ist gleich.



3.5. Satz T: L ist genau dann regulär, wenn der Index von $\equiv_L$ endlich ist.
(Es handelt sich hierbei um den Satz von Myhill / Nerode)

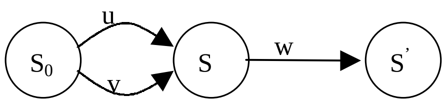
3.6. Beweis: **„$\Rightarrow$"** (die eine Richtung)

Sei L regulär, zeige $\mid K_L \mid$ endlich.

Sei $L \subseteq X^*$ eine Sprache und sei $A = (X, S, \delta, s_0, F)$ ein endlich deterministischer Akzeptor mit $L = L(A)$.

Man betrachte nun zwei Wörter $u, v \in X^*$ mit $\delta(s_0, u) = s = \delta(s_0, v)$.

Jetzt gilt für alle $w \in X^*$:



$$\delta(s, w) = \delta(s_0, uw) = \delta(s_0, vw)$$

d.h.: $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$

Wenn also $\delta(s_0, u) = \delta(s_0, v)$, dann folgt $u \equiv_L v$ und $[u] = [v]$.

Folglich ist die Zahl der Äquivalenzklassen höchstens so groß wie die Zahl der Zustände $\mid S \mid$, also ist der Index von $\equiv_L \leq \mid S \mid$, also deswegen endlich.

„$\Leftarrow$" (die andere Richtung)

Sei $L \subseteq X^*$ eine Sprache mit endlichen Index.

Dann ist nach Definition S $K_L = \{[u_1], ..., [u_k]\}$ für geeignete Wörter $u_1, ..., u_k \in X^*$ definiert.

Man definiert nun einen endlichen deterministischen Akzeptor, der L akzeptiert.

Idee: Man verwendet die Äquivalenzklassen als Zustände.
Sei also $A = (X, S, \delta, s_0, F)$ ein endlich deterministischer Akzeptor mit

$S = K_L$ (Zustandsmenge)
$s_0 = [\varepsilon]$ (Anfangszustand)
$F = \{[w] \mid w \in L\}$ (Endzustandsmenge)
$\delta : S \times X \to S$ mit $\delta([w], x) = [wx]$ für alle $x \in X$

Zwischenbetrachtung:
Man sollte sich fragen, ob die Definition überhaupt „sinnvoll" ist.
Dazu prüft man nach, ob A und δ wohldefiniert sind.
Dies bedeutet in unserem Fall, egal welchen Vertreter der Äquivalenzklasse man verwendet, dass Ergebnis von δ muss eindeutig bestimmt sein.

Man zeigt also: $[v] = [u] \Rightarrow \delta([v], x) = \delta([u], x)$ für alle $x \in X$

Zwischenbeweis:
$[v] = [u] \Rightarrow v \equiv_L u$ dann folgt nach Definition **R** und Bemerkung **2**
$\Rightarrow \forall x \in X : vx \equiv_L ux \Rightarrow [vx] = [ux]$

Das heißt also: $\delta([v], x) = [vx] = [ux] = \delta([u], x)$
Somit ist δ wohldefiniert und folglich auch A.

Nun ist noch zu zeigen: $L = L(A)$
Sei $w \in L(A) \Rightarrow \delta(s_0, w) \in F \Leftrightarrow \delta([\varepsilon], w) \in F \Leftrightarrow [w] \in F \Leftrightarrow w \in L$, da $[\varepsilon w] = [w]$.

ENDE der Vorlesung vom 09.06.2000