

# Eigenschaften komplexer Probleme

What Makes Some Problems Really Hard:  
Explorations in the Problem Space of Difficulty  
Kotovsky und Simon

Jan Höhle

Potsdam, den 19. Mai 2003

# 1 Einleitung

In dieser Arbeit werden die Eigenschaften komplexer Probleme die dem Menschen täglich begegnen und deren Problemlösung vorgestellt. Dazu wird eine wissenschaftliche Studie von Kenneth Kotovsky und Herbert A. Simon, die sich mit dem Lösen des Chinese-Ring-Puzzle beschäftigt, verwendet.

Die sogenannten Probleme von denen hier gesprochen wird, sind normale lösbare Probleme die dem Menschen jeden Tag begegnen und die gemessen an ihrer Komplexität mehr oder weniger Aufwand zur Lösung benötigen. Aus der Sicht der Informatik bestehen Probleme aus Zustandssituationen und Operationen die einen Wechsel der Zustände bewirken. Es existiert ein Anfangszustand und ein Zielzustand, der über Anwendung der Operationen erreicht werden kann. Es soll in dieser Arbeit keine allgemeine Lösungsstrategie für Probleme gefunden werden. Die Idee hinter dieser Arbeit ist die Charakteristik, die ein Problem für den Menschen mehr oder weniger schwer macht, herauszuarbeiten.

## 1.1 Problem-Parameter

Es gibt für Probleme einige objektiv messbare Komplexitäts-Parameter die im folgenden beschrieben werden.

- Die Suchraumgröße wird beschrieben durch Verzweigungsgrade, Tiefe und die Zustandsanzahl.
- Die Operatoren werden unterschieden nach der Komplexität ihrer Ausführung.
- Die Bekanntheit stellt das Problem in Beziehung zu analogen Problemen oder Problemklassen.

Bei den nachfolgenden Untersuchungen werden diese Parameter zu den Problemen gemessen und in Beziehung zum menschlichen Empfinden der Problemgröße gesetzt.

## 2 Chinese Ring Puzzle

Kotovsky und Simon führten 1990 Experimente zum Chinese-Ring-Puzzle durch. Dieses Puzzle soll als Problem für die Versuchspersonen dienen. Um die Komplexitäts-Parameter verändern zu können wurden unterschiedliche Repräsentationen des Puzzles geschaffen und getestet. Im folgenden wird das Chinese Ring Puzzle vorgestellt und deren geschaffenen Varianten.

## 2.1 Analoge Variante

Das Original des Puzzle in Abbildung 1 besteht aus 9 Ringen die aufgereiht auf 2 parallelen Stäben sind. Die 2 Stäbe sind an den Enden verbunden. Die Ringe sind untereinander über Haken verschachtelt und unterbinden das einfache Abziehen der Ringe. Diese Haken sind durch einen weiteren Stab verbunden. Das Ziel ist alle Ringe von den 2 parallelen Stäben zu lösen. Dazu können die Ringe auf verschiedenste Weise geschoben und gefädelt werden. Die im Versuch verwendete analoge Variante besteht nur aus 5 Ringen (Abbildung 1). Die Lösungsstrategie ist jedoch die gleiche.

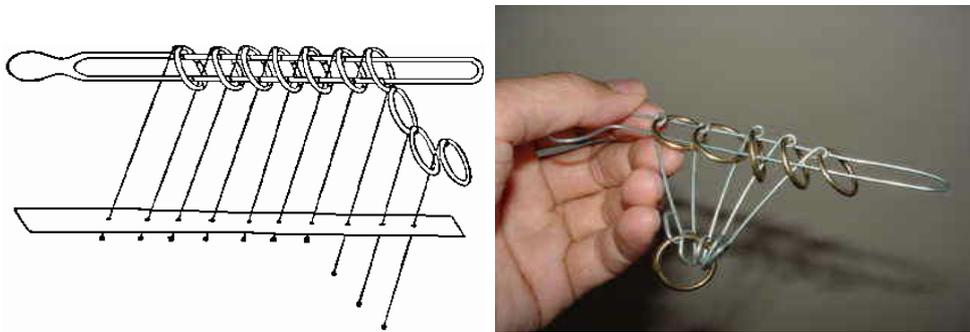


Abbildung 1: Original und Analoge Variante

## 2.2 Digitale Variante 1

Diese Variante wird auf dem Computer simuliert und vereinfacht auf dem Bildschirm ausgegeben. Auf dem Bildschirm werden wie in Abbildung 2 die 5 Ringe optisch in 5 Kästen dargestellt. Ein leerer Kasten steht für einen Ring der an der zugehörigen Position von den 2 Stäben heruntergenommen ist. Ein Kasten mit Ring zeigt, daß der Ring noch auf die 2 Stäbe aufgereiht ist. Die Interaktion des Benutzers besteht in dem Klicken der Maus in eines der 5 Kästen. Wenn die analoge Variante es erlaubt, wird der zum Kasten gehörige Ring entfernt oder hinzugefügt. Falls es nicht möglich war, den Ring zu manipulieren, passiert nichts. Das Ziel ist wie bei der analogen Variante alle Ringe zu entfernen.

## 2.3 Digitale Variante 2

Diese Variante entspricht im wesentlichen der digitalen Variante 1. Zusätzlich wurden in der Anzeige die Ringe optisch markiert die manipuliert werden können. Dadurch vereinfacht sich für den Benutzer die Suche nach manipulierbaren Ringen.

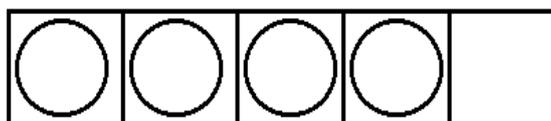


Abbildung 2: Digitale Variante

## 2.4 Digitale Variante 3

Diese Variante entspricht im wesentlichen der digitalen Variante 1. Jedoch enthält diese Variante eine Art Zughilfe durch eine Simulation der analogen Variante, präsentiert auf dem Bildschirm. Diese Simulation ist etwas verschieden von der Darstellung der analogen Variante. Sie ermöglicht jedoch das Erkennen der Zugbegrenzungen für die Ringe.

## 2.5 Lösung des Chinese Ring Puzzle

Eine genaue Analyse des Chinese Ring Puzzle führt zu folgenden Ergebnissen. Es gibt maximal 2 Möglichkeiten einen Zug durchzuführen. Eine Möglichkeit ist es, den Ring der keinen Ring auf der rechten Seite jedoch einen linken Nachbar hat auf- oder abzunehmen. Eine weitere Möglichkeit ist es den Ring der vor dem zuletzt rechts aufgefädelten Ring liegt auf- oder abzunehmen. Damit ergeben sich 2 elementare Operationen. Ausgehend von der Startposition ergeben sich 2 Richtungen den Suchraum abzulaufen. Da es keine Verzweigungen gibt ist der Suchraum linear. Damit ist das Problem einfach, gemessen anhand der Komplexität des Suchraums. Jedoch ist bei der analogen Variante nicht unmittelbar ersichtlich, wie eine Operation durchzuführen ist und damit die Komplexität der Operationen sehr groß. Die Lösung ist in 21 Zügen zu erreichen.

## 2.6 Experiment 1

Das erste Experiment von Kotovsky und Simon wurde mit 26 Studenten durchgeführt. Jeder Student erhielt 2 aus 3 der folgenden Aufgaben mit einer Zeitbegrenzung.

- a) Analoge Variante (90 min)
- b) Digitale Variante 1 (60 min)
- c) Digitale Variante 2 (60 min)

Jeder Student sollte nun in vorgeschriebener Zeit das ihm gestellte Problem lösen. Zwischen den 2 Aufgaben war eine kurze Pause.

## 2.7 Ergebnisse von Experiment 1

Die mittlere Lösungszeit der Studenten für die einzelnen Probleme war:

- a) von 12 Studenten nur einer geschafft
- b) 25,48 min
- c) 14,55 min

Weiterhin wurde eine Verbesserung der Lösungszeit um die 30% gemessen, wenn eine digitale Variante als 2. Aufgabe zu lösen war. Dies kann als Lerneffekt aus der 1. Aufgabe gewertet werden.

Die Ergebnisse führen zu folgender Aussage: Die digitale Varianten unterscheiden sich stark von der extrem schweren analogen Variante. Die zusätzlichen Hilfeinformationen für legale Züge konnte die Lösungszeit verkürzen. Der Lerneffekt für analoge Aufgaben ist sehr hoch.

## 2.8 Experiment 2

Das zweite Experiment von Kotovsky und Simon wurde mit 69 Studenten durchgeführt. Es entspricht im wesentlichen Experiment 1. Durch die höhere Anzahl der Studenten wird das Ergebnis repräsentabel. Die analoge Variante wurde erleichtert, indem einige Anfangszüge vorgeführt wurden. Jeder Student erhielt 2 aus 3 der folgenden Aufgaben mit einer Zeitbegrenzung.

- a) Analoge Variante mit Zughilfe (120 min)
- b) Digitale Variante 1 (30 min)
- c) Digitale Variante 2 (30 min)

Jeder Student sollte nun in vorgeschriebener Zeit das ihm gestellte Problem lösen. Zwischen den 2 Aufgaben war eine kurze Pause.

## 2.9 Ergebnisse von Experiment 2

Die mittlere Lösungszeit der Studenten für die einzelnen Probleme war:

- a) 79,7 min als 1. Aufgabe, 86,7 min als 2. Aufgabe
- b) 19,9 min als 1. Aufgabe, 18,3 min als 2. Aufgabe
- c) 13,0 min als 1. Aufgabe, 10,4 min als 2. Aufgabe

Damit ist klar, daß Aufgabe a) die schwerste Aufgabe trotz Zughilfe ist und Aufgaben b) und c) entschieden leichter sind. Beim Chinese-Ring-Problem ist die Hauptursache für die Schwierigkeit des Problems auf die Zugkomplexität zurückzuführen.

### **2.10 Experiment 3**

Das dritte Experiment von Kotovsky und Simon wurde mit 42 Studenten durchgeführt. Diesmal wurden die digitalen Varianten näher untersucht. Jeder Student erhielt 2 aus 3 der folgenden Aufgaben mit einer Zeitbegrenzung.

- a) Digitale Variante 1 (30 min)
- b) Digitale Variante 2 (30 min)
- c) Digitale Variante 3 (30 min)

Jeder Student sollte nun in vorgeschriebener Zeit das ihm gestellte Problem lösen. Zwischen den 2 Aufgaben war eine kurze Pause.

### **2.11 Ergebnisse von Experiment 3**

Die digitale Variante 3 benötigte die längste Zeit und die kürzeste mittlere Anzahl von Zügen. Dies kann darauf zurückgeführt werden, daß die zusätzliche Anzeige zur Zugrestriktion die Versuchspersonen mehr zum Nachdenken angeregt haben. Experiment 3 zeigt das zusätzliche Information hilfreich sein kann, jedoch das Lösen der Probleme verlangsamt.

### **2.12 Experiment 4**

Das vierte Experiment von Kotovsky und Simon wurde mit 42 Studenten durchgeführt. Diesmal wurden die digitalen Varianten mit unterschiedlichen Ausgangspositionen untersucht. Dazu konnten zu jeder Variante 2 unterschiedliche Ausgangspositionen gewählt werden. Die Varianten und der Versuchablauf ist der gleiche wie bei Experiment 3.

### **2.13 Ergebnisse von Experiment 4**

Es wurden keine signifikanten Unterschiede zwischen dem Lösen des Problems aus den beiden Startpositionen gemessen. Damit ist belegt, daß die Ausgangssituation im Problemraum nicht wesentlich für die Problemlösung des Chinese-Ring-Problem ist.

### 3 Zusammenfassung

Das Chinese-Ring-Puzzle steht für ein Problem mit sehr hohen Schwierigkeitsgrad, trotz des einfachen Suchraumes. Hilfreiche Informationen zur Lösung des Chinese-Ring-Puzzle könnten wie folgt sein:

- lerne vorwärts zu gehen und nicht vorherige Zustände herzustellen
- lerne die Zugbeschränkungen um illegale Züge zu vermeiden
- lerne eine Abfolge von Bewegungen zusammenzufassen um Zielpläne zu entwickeln

Desweiteren zeigt das Chinese-Ring-Puzzle, daß die Länge des Problemraums unwesentlich für den Schwierigkeitsgrad des ganzen Problems ist. Eine Repräsentation des Problems als digitale Variante kann das Problem erleichtern. Aus dem Problem des Chinese-Ring-Puzzle können wir folgende Erkenntnisse für Probleme im allgemeinen ableiten.

- Die Zugkomplexität ist ein wichtiger Parameter für die Schwierigkeit von Problemen.
- Die Definition von isomorphen Problemen in Bezug auf Zustandsraum und Operatoren ist zu überdenken, da isomorphe Probleme für den Menschen trotzdem unterschiedliche Komplexität darstellen.
- Das Kennenlernen von verwandten, leichten Problemen ist nicht unbedingt eine Hilfe für die schweren Probleme.
- Das Erlernen von ähnlichen Zügen in isomorphen Problemen kann zum positiven Transfer (Übertragung des gelernten Wissens) führen, nicht jedoch die Begegnung mit ähnlichen Problemräumen.

Damit endet die Ausarbeitung des Vortrages.

## Literatur

- [1] Kenneth Kotovsky und Herbert A. Simon. What makes some problems really hard: Explorations in the problem space of difficulty. 1990.
- [2] Bauanleitung für das Chinese-Ring-Puzzle  
[http://jckleung.ccss.edu.hk/ninering/solu\\_eng.html](http://jckleung.ccss.edu.hk/ninering/solu_eng.html).